

і торгівлі України від 29 жовтня 2013 року № 1277. URL: <http://www.me.gov.ua/Documents/List?lang=uk-UA&tag=MetodichniRekomendatsii>.

17. Рейтинг інвестиційної привабливості регіонів 2013. URL: [https://www.invest-lvivregion.com/UserFiles/File/Rejting\\_invest.pdf](https://www.invest-lvivregion.com/UserFiles/File/Rejting_invest.pdf)

18. Темпи ефективності боротьби з корупцією в Україні за рік знизилися вдвічі – Індекс сприйняття корупції 2017. URL: <https://ti-ukraine.org/news/tempy-efektyvnosti-borotby-z-koruptsiieiu-v-ukraini-za-rik-znyzylisia-vdvichi-indeks-spryiniattia-koruptsii-2017/>

19. Теоретико-методологічні основи інвестиційно-інноваційної безпеки національної економіки України: монографія / за ред. чл.-кор. НАПН України, д.е.н., проф. І.М. Грищенко, д.е.н., проф.

В.М. Узунова; д.е.н., проф. Денисенка М.П., 2013. 464 с.

20. Тимошенко О. В. Використання інтегральної моделі оцінювання економічної безпеки держави та її основних функціональних компонентів. Актуальні проблеми економіки. 2016. № 9. С. 95-108.

21. Харазішвілі Ю.М. Методологічні підходи до оцінки рівня економічної безпеки країни. Наука та наукознавство. 2014. № 4. С. 44-58.

22. Heritage Foundation. URL: <http://www.index.heritage.org>.

23. Standard & Poor's. URL: [https://www.standardandpoors.com/en\\_US/web/guest/home](https://www.standardandpoors.com/en_US/web/guest/home).

24. World Bank. URL: <http://www.worldbank.org/>.

25. World Economic Forum. URL: <http://reports.weforum.org/global-competitiveness>.

## МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА КАК НЕЛИНЕЙНАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

### MODEL OF DYNAMIC CHAOS, AS A NON-LINEAR ECONOMIC SYSTEM

*В статье предложена модель функционирования экономической системы на основе модели динамического хаоса, описываемого математической моделью странного аттрактора Лоренца. Численная реализация модели, представленной в виде системы дифференциальных уравнений, осуществляется в пакете Matlab при конкретных значениях экзогенных параметров модели. Показано существенное влияние этих параметров на поведение системы. Ключевые слова: синергетическая модель, хаос, экономическая система, численная реализация, фазовые портреты.*

*У статті запропонована модель функціонування економічної системи на основі моделі динамічного хаосу, описуваного математичною моделлю дивного аттрактора Лоренца. Чисельна реалізація моделі, поданої у вигляді системи диференціальних рівнянь, здійсню-*

*ється в пакеті Matlab за конкретних значень екзогенних параметрів моделі. Показано суттєвий вплив цих параметрів на поведінку системи.*

**Ключові слова:** синергетична модель, хаос, економічна система, чисельна реалізація, фазові портрети.

*The article proposes a model of the functioning of the economic system based on the dynamic chaos model described by the mathematical model of the strange Lorenz attractor. Numerical implementation of the model represented in the form of a system of differential equations is implemented in the Matlab package, with specific values of the exogenous parameters of the model. A significant influence of these parameters on the behavior of the system is shown.*

**Key words:** synergetic model, chaos, economic system, numerical realization, phase portraits.

УДК 519.86

**Семенов А.С.**

к.ф.-м.н., доцент кафедры экономической кибернетики и информационных технологий  
Одесский национальный политехнический университет

**Постановка проблемы.** Из общности экономической динамики и теории колебаний, например [1, 2], вытекает возможность расширения рамок моделирования нелинейных экономических процессов. С целью адекватного отражения реальности необходим учет и анализ нелинейных эффектов социально-экономических процессов, учет потери устойчивости, возникновения кризисов, зарождения и развитие новых состояний, возникновения хаоса, который является естественной динамической формой эволюции экономических систем. В настоящее время такой учет стал возможным благодаря хорошо разработанной теории устойчивости решения дифференциальных уравнений и существующим программным продуктам, позволяющим исследо-

вать системы нелинейных дифференциальных уравнений любой сложности. В обзорной работе [3], содержащей солидную библиографию по этому вопросу, приводятся некоторые примеры применения теории хаоса к построению и исследованию экономических моделей. В этой работе сделана попытка продолжения исследований в этом направлении, где за основу взята модель странного аттрактора Лоренца [4].

**Анализ последних исследований и публикаций.** Примеры построения и исследования моделей экономической динамики на основе обыкновенных дифференциальных уравнений приводят, как правило, к результатам, включающим экспоненциально растущие функции времени [5]. Кроме общих недостатков такого решения, использова-

ние результатов расчетов в этом случае возможно лишь на коротких отрезках времени.

Определенная ограниченность области применения линейных моделей приводит к необходимости учета в моделях нелинейных зависимостей. Невозможность получить строгое аналитическое решение такой задачи с появлением быстродействующих компьютеров перестало быть трагедией. В настоящее время стало возможным проводить численные исследования и эксперименты существенно нелинейных систем, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений. Известны сложности как построения адекватных математических моделей функционирования экономических систем, так и их решения и анализа. И основным аппаратом исследования в этом случае становятся численные методы. В существенно нелинейных моделях наряду с гармоническими колебаниями обнаруживаются сложные полигармонические устойчивые и неустойчивые режимы, бифуркации, странные аттракторы, то есть режимы, которые не поддаются исследованию в рамках линейного и квазилинейного подхода.

Рыночная экономика – сложнейшая самоорганизующаяся система, и модели рыночной экономики базируются на синергетических подходах. Синергетика характеризуется нелинейностью, сложностью, открытостью, неравновесностью и диссипативностью. Одним из «инструментов» самоорганизации и обновления системы для синергетики является хаос.

Хаос является естественной динамической формой эволюции сложных систем, который можно трактовать как естественную среду проявления конкуренции. Именно при переходе от хаоса к упорядоченным движениям зарождаются новые устойчивые, нетривиальные, наиболее перспективные и прибыльные направления в экономике [6].

В пользу того, что хаос в развитии экономической системы не только играет деструктивную роль, но и является конструктивным фактором развития, говорит еще и то, что экономические системы являются открытыми.

Всякая система, в том числе и экономическая, подвержена движению в сторону возрастания энтропии (второй закон термодинамики). Чем больше энтропия, тем больше беспорядок. С момента появления работ нобелевского лауреата (1974 г.) Ильи Пригожина системы разделяют на открытые и закрытые, на те, что находятся во взаимодействии с окружающей средой, и те, которые не находятся в таком взаимодействии. Выяснилось, что развитие в открытых системах происходит именно через беспорядок (хаос). Одновременно выяснилось, что каждая открытая система увеличивает энтропию вне своих преде-

лов, т.е. при развитии системы увеличивается беспорядок вокруг нее. Упорядочивание внутри системы приводит к росту беспорядка вне ее [7].

Недостатком модели можно считать то, что для динамического хаоса характерна невозможность предсказания поведения модели на длительное время. Это свойство проявляется даже у сравнительно простых структур [8].

**Постановка задания.** Примером модели динамического хаоса может служить модель странного аттрактора Лоренца [4]. Придав переменным модели конкретное смысловое экономическое значение и выбирая конкретные числовые значения коэффициентов системы, приходим к существенно нелинейной модели функционирования экономической системы. Построенная математическая модель экономической системы представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений. Решение и его исследование осуществляется с помощью программного продукта Matlab.

**Изложение основного материала исследования.** Рассмотрим экономическую систему, производящую некую продукцию с использованием некоторого ресурса. Полагаем, что скорость изменения объема производства пропорциональна разности между доходом и расходом на изготовление продукции. Пусть в денежном выражении  $x$  – объем производства,  $y$  – объем реализованной продукции,  $\alpha$  – рыночная цена реализованной продукции,  $\beta$  – себестоимость реализуемой продукции.

Тогда скорость изменения объема реализованной продукции определится из уравнения:

$$\dot{x} = \alpha y - \beta x. \quad (1)$$

Предположим далее, что  $\rho$  – коэффициент рыночного спроса,  $\gamma$  – коэффициент насыщения рынка продукцией предприятия,  $\delta$  – коэффициент обеспеченности производства ресурсами,  $z$  – необходимый для производства продукции объем ресурсов. И скорость изменений объема производства продукции удовлетворяет уравнению:

$$\dot{y} = \rho x - \gamma y - \delta xz. \quad (2)$$

Примем следующие обозначения:  $b$  – коэффициент скорости расхода ресурсов,  $l$  – коэффициент ресурсообеспеченности. Тогда скорость изменения объема ресурса будет удовлетворять уравнению

$$\dot{z} = -bz + lxy. \quad (3)$$

Объединяя полученные три уравнения, приходим к следующей математической постановке производства экономической системой некоторой продукции:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha y - \beta x \\ \dot{y} = \rho x - \gamma y - \delta xz \\ \dot{z} = -bz + lxy \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) совпадает с моделью Лоренца, описывающей возникновение хаоса в детерминированной системе, когда функционирование системы становится неуправляемым и создаются условия возникновения кризиса. Наличие параметров в описании модели является характеристикой незамкнутости системы, что позволяет, управляя этими параметрами, вывести работу системы на стационарный устойчивый режим. Появление в решении отрицательных значений  $x$  соответствует накоплению нереализованной продукции, появление отрицательных значений  $y$  – падению спроса на продукцию и превышению расходов на изготовление продукции над доходами от ее реализации.

Для численной реализации модели выбираем начальные условия:  $x_0 = 1; y_0 = 1; z_0 = 1$ . Моделирование сформулированного динамического хаоса проводится в пакете Matlab. Система уравнений представляется в нормальной форме Коши и используется оператор-функция решения, например, `ode45( )`, использующая метод Рунге-Кутты. Предварительно создается  $m$ -функция, описывающая систему уравнений с указанием пути до каталога, в котором сохранен файл с текстом, например, с помощью команды `path`. С помощью вызова команды `path(matlabpath,'новый путь')` можно добавить новый путь к файл-функции. Имя файл-функции, начальные условия, точность расчета содержится в параметрах оператора решения. Однако, в этом простом случае можно обойтись и без создания файл-функции. Задавшись конкретными значениями коэффициентов, при которых система уравнений (4) описывает странный аттрактор Лоренца, запишем простую программу решения поставленной задачи:

$$\alpha = \beta = 10; \rho = 28; \gamma = \delta = l = 1; b = \frac{8}{3}$$

```
clear all
clc
sigma=10;
beta=8/3;
rho=28;
f = @(t,a) [-sigma*a(1) + sigma*a(2); rho*a(1) - a(2) - a(1)*a(3); -beta*a(3) + a(1)*a(2)];
```

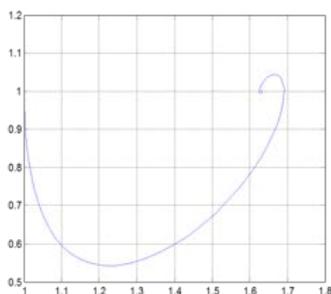
```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1 1 1]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
grid on
```

Далее было проведено подробное компьютерное моделирование функционирования заданной экономической системы при изменении входных параметров задачи в различных числовых промежутках. Например, изучена зависимость продаж продукции  $y$  от объемов ресурсов  $z$  при, например, различном спросе  $\rho$  на рынке. Изменение этих же параметров системы изучалось в зависимости от рыночной цены продукции  $\alpha$ . Получены как численные значения основных переменных задачи, так и графическая иллюстрация их изменения. Приведем три фазовых портрета из всего полученного большого объема данных.

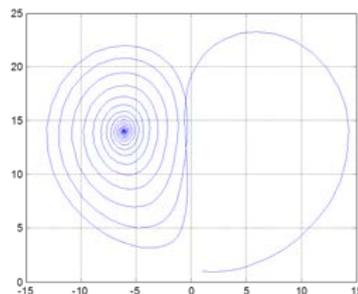
Последний фазовый портрет свидетельствует о бурной деятельности предприятия при существенном спросе на рынке. Формирование второго крыла «бабочки» в виде одного витка кривой начинается со значения  $\rho = 15$  при  $\alpha = \sigma = 10$  и  $\beta = 8/3$ , а также при изменении  $\sigma$  в пределах  $8 \leq \sigma \leq 13$ . Начиная со значений  $\rho = 24$  второе крыло «бабочки» формируется полностью.

**Выводы из проведенного исследования.** Модель странного аттрактора Лоренца достаточно адекватно отражает реальный процесс функционирования экономической системы. Выяснилось, что коэффициенты уравнений модели как экзогенная экономическая характеристика являются существенными управляющими параметрами системы. Изменяя параметры, приходим либо к случаю катастрофического развития системы, переходу к кризису, либо к устойчивому режиму работы. Таким образом, построенная на основе теории хаоса модель экономической динамики позволяет провести анализ функционирования системы и выяснить условия выхода на устойчивый режим работы.

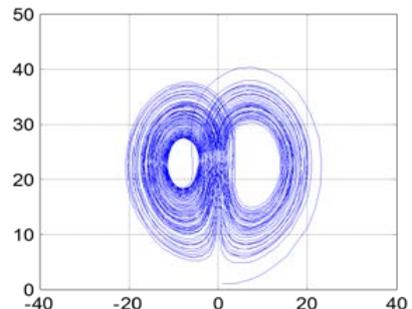
Наличие большого числа параметров, в задаче их семь, ограничило данное исследование рассмотрением влияния лишь трех из них. Очевидно, в такой нелинейной системе существует взаи-



a



b



c

Фазовый портрет реализации продукции  
а) при  $\rho = 2$ ; б) при  $\rho = 15$ ; в) при  $\rho = 24$

мовляние параметров на поведение системы в целом. Целью дальнейшего исследования может служить как раз определение степени влияния отдельных параметров и групп из этих параметров на результирующее поведение системы.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:**

1. Кондратьев Н.Д. Проблемы экономической динамики / Н.Д. Кондратьев – М.: Изд. Иностран. Литер. 1989. 523 с.
2. Устиан И. Экономическая динамика в свете теории «больших циклов» Н.Д. Кондратьева // Экономист. 1998. № 9. С. 68-76.
3. Андриевский Б.Р., Фрадков А.А. Управление хаосом: методы и приложения. С.Пб.: Автоматика и телемеханика, 2003, вып. 5, с. 3-45.

4. Lorenz H.W. Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Springer, Berlin, 1993. 248 p.
5. Моделирование экономической динамики: Учебное пособие/ Клебанова Т.С., Дубровина Н.А., Полякова О.Ю., Раевнева Е.В., Милов А.В., Сергиенко Е.А. 2-е изд., стереотипн. Х.: Издательский Дом «ИНЖЭК», 2005. 244 с.
6. Berry V.J.L. and Kim H/ Long Waves 1790-1990: Intermittency, Chaos, and Control. In: Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications. Ed.L.D. Kiel and E.Elliot. Ann Arbor, 1966/
7. Пригожин И.Р. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой/ И.Р. Пригожин, И.Стенгерс; пер. с англ. М.: Прогресс, 1986. 431 с.
8. Петров Л.Ф. Методы динамического анализа экономики: Учебн.пособие/ Л.Ф. Петров. М.: ИНФА М, 2010. 239 с.