ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ КЕРОВАНОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ В ЕКОНОМІЦІ

APPLYING OF CONTROLLABILITY THEORY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY IN ECONOMICS

УДК 330.46:519.86

Піддубна Г.К.
PhD з математики, старший викладач кафедри комп'ютерних та інформаційних технологій і моделювання економіки
Комунальний вищий навчальний заклад «Інститут підприємництва «Стратегія» Дніпропетровської обласної ради»

Стаття присвячена застосуванню існуючих результатів теорії керування в економіці. Для соціально-еколого-економічної системи продемонстровано шлях побудови відповідної лінійної диференціальної стаціонарної системи із запізненням. Побудовано відповідну систему керування. Проведено аналіз керованості лінійної стаціонарної динамічної системи із запізненням. Наведено необхідні та достатні умови керованості системи. Розраховано чисельний приклад застосування необхідних і достатніх умов керованості.

Ключові слова: *соціально-еколого-економічна система, диференціальні рівняння із запізненням, лінійні стаціонарні системи, системи керування, керованість.*

Статья посвящена применению существующих результатов теории управления в экономике. Для социально-эколого-экономической системы продемонстрировано способ построения соответсвующей линейной дифференциальной стационарной системы с запаздыванием. Построено соответсвующую систему управления. Проведено анализ управляемости линейной стационарной динамической системы с запаздыванием. Приведены необходимые и достаточные условия управляемости динамической системы. Рассчитан численный пример использования необходимых и достаточных условий управляемости.

Ключевые слова: *социально-эколого-экономическая система, дифференциальные уравнения с запаздыванием, линейные стационарные системы, системы управления, управляемость.*

This paper is devoted to applying of existed results on control theory in economics. For social-environmental-economic system the way of correspondent linear differential stationary system with delay was demonstrated. The correspondent control system was constructed. Analysis of controllability of linear stationary dynamical system with constant aftereffect was conducted. Necessary and sufficient conditions for controllability were shown. Numerical example of necessary and sufficient conditions usage was calculated.

Key words: *social-environmental-economic system, differential equation with delay, linear stationary system, commutative matrices, controllability.*

Постановка проблеми. Процес розвитку соціально-еколого-економічних систем можна розглядати з точки зору математики, як динамічну модель. Тому, проаналізувавши характер поведінки і залежності складових системи, стає можливою побудова відповідної задачі Коші. Існуючий математичний апарат дозволяє не тільки передбачити поведінку і розвиток системи безпосередньо використавши розв'язок такої системи, але також проаналізувати її керованість, тобто зробити висновки, чи можливо систему за наявності певних важелів впливу (наприклад інвестицій) перевести у бажаний стан.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналізу і побудові динамічних моделей для систем, до складу яких соціальні, екологічні або економічні системи входять, як підсистеми, присвячені роботи сучасних вітчизняних та зарубіжних учених: В. В. Вітлінського, В. М. Даніча, В. Б. Занга, М. М. Іванова, Ю. Г. Лисенка, Н. К. Максишко, О. М. Марюти, В. М. Порохні, С. К. Рамазанов, Л. Н. Сергєєвої, В. М. Тимохіна та ін.

При побудові динамічних систем досить часто виникає ефект запізнення – затримка в реакції системи на певний проміжок часу. В економіці причинами цього ефекту найчастіше є інертність системи щодо вхідних чинників. Таким чином, для наближення до реального перебігу процесів, у динамічні системи, що описують ці процеси, вводиться елемент, який має запізнення в часі. При наявності можливості впливу на динамічну систему також постає питання керованості, тобто питання можливості за допомогою певних ресурсів приведення системи до бажаного стану, виходячи із початкових умов і параметрів системи.

Задачами, пов'язаними із диференціальними рівняннями із запізненням займалися такі вчені, як: Вольтерра В., Норкин С. Б., Мышкис А. Д., Хусаїнов Д. Я., Баштинець Я. (J. Baљtinec), Діблік Й. (J. Diblнk), Ружічкова М. (M. Rщћiиkovб). Розробкою і дослідженням математичного апарату для встановлення керованості динамічних систем присвячено статті Хусаїнова Д. Я., Ружічкової М. (M. Rщћiиkovб), Баштинця Я. (J. Baљtinec), Піддубної Г. К.

Постановка завдання. Метою дослідження є питання можливості застосування існуючого математичного апарату з теорії диференціальних рівнянь із запізненням та теорії керованості до реальних проблем економіки. Окремою задачею виноситься питання керованості економічною системою.

Виклад основного матеріалу дослідження. Побудуємо динамічну модель для соціально-еколого-економічної системи. Нехай $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ є вектором стану економічної системи, де кожна з трьох компонент відповідає за динаміку відповідно соціальної, екологічної і економічної складової. Кожна складова може нести в собі інформацію щодо декількох показників кожної складової, тобто бути вектором цих величин, але для цього випадку наведені нижче викладки будуть повністю збігатися, тому не порушуючи загальності, вважатимемо систему системою розмірності 3.

На першому етапі побудови математичної моделі динамічної системи необхідно побудувати лінійну залежність процесу розвитку системи. Нехай, проаналізувавши залежності між цими складовими та безпосередньо сам процес, нам вдалося визначити коефіцієнти лінійних залежностей між ними. З цих коефіцієнтів ми можемо побудувати матрицю констант *A* розмірності 3х3, що характеризує характер розвитку системи, а тому можемо говорити про динамічну систему (1):

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t). \\ &x_0 = x(t_0) \end{aligned} \quad (1)$$

Нехай нам відомо, що система демонструє стале запізнення стану на деяку сталу величину часу *τ*. Системи, що демонструють таку поведінку, називаються системами із чистим сталим запізненням (2):

$$\dot{x}(t) = Ax(t-\tau)\ . \quad (2)$$

Зрозуміло, що для однозначного визначення розв'язку такого рівняння одного початкового стану буде недостатньо, тому необхідно визначити початкову функцію на цілому інтервалі:

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau; 0], \quad (3)$$

це означає, що для застосування теорії диференціальних рівнянь із запізненням, необхідно мати дані про перебіг розвитку динамічної системи за певний час, тобто мати історію розвитку.

Таким чином, ми отримали задачу Коші (2)-(3), яка була розв'язана Д. Я. Хусаїновим, так звану «спізнюючу» експоненту [2, 6].

Для застосування існуючих результатів, на другому етапі побудови математичної моделі, необхідно визначити коефіцієнти лінійної залежності елементів системи, що мають сталу часову затримку. Нехай нам вдалося виділити окремо чинники, що впливають на систему миттєво та чинники, на які система демонструє постійне запізнення. У такому випадку ми можемо сформулювати перебіг розвитку динамічної системи, виділивши окремо «миттєву» та запізнюючу складову:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau)\,. \quad (4)$$

Задачею Коші для цього рівняння буде система (4)-(3) і її розв'язанню присвячено ряд робіт [3, 4, 5]. Зокрема було побудовано розв'язки для випадків однакових матриць $A_0 = A_1$, переставних матриць $A_0 A_1 = A_1 A_0$, а також для загального випадку [3, 5]. Маючи розв'язок системи у явному вигляді, неважко спрогнозувати стан системи в довільний момент часу, просто застосувавши формулу розв'язку. Для знаходження розв'язку є необхідним етапом проведення і структурування історії розвитку динамічної системи на період часу, що дорівнює часу запізнення системи, тобто приведення її до вигляду (3).

На практиці для дослідження певної соціально-еколого-економічної системи просто знати стан системи в певний момент часу зазвичай недостатньо. За наявності певного впливу на систему можна говорити про задачу керування, для якої важливим є питання керованості, тобто можливість переведення системи в бажаний стан. Для цього в систему вводять вектор функцій керування $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$, де кожна компонента є функцією впливу відповідно на соціальну, екологічну і економічну складові системи. У класичній теорії керування, для задачі Коші (1), складається відповідна задача керування:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Початковий стан системи x_0 називається керованим, якщо існує така функція *u*(*t*), і такий момент часу t_1, що

$$x(t_1) = (0,0,0)^T.$$

Якщо кожен початковий стан системи є керованим, то таку систему називають керованою.

Для задачі керування (5) є відомим наступний критерій керованості:

Теорема. *Динамічна система (5) буде керованою тоді і тільки тоді, коли матриця*

$$R = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \;\; A^{n-1}B]$$

є матрицею повного рангу, тобто рангу n, де n є розмірністю системи (5).

Подібний результат було отримано і для задачі Коші побудованої для диференціальних рівнянь із запізненням. Задача керування, що відповідає системі (4), буде мати наступний вигляд:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) + Bu(t)\,, \quad (6)$$

де матриця *B* є матрицею констант, яка складається із коефіцієнтів впливу керуючої функції на кожну складову соціально-еколого-економічної моделі. Визначення значень цих констант слід розрахувати виходячи із наявних ресурсів і важелів впливу на систему.

Критерій керованості у формі, подібній до класичного критерію, для системи (6) був сформульований також у вигляді теореми.

Теорема. *Динамічна система (6) буде керованою тоді і тільки тоді, коли матриця*

$$K = [B \;\; A_0B \;\; A_1B \;\; A_0{}^2B \;\; (A_0A_1 + A_1A_0)B \;\; A_1{}^2B$$
$$A_0{}^3B \;\; (A_0{}^2A_1 + A_0A_1A_0 + A_1A_0{}^2)B \;\; (A_0A_1{}^2 + A_1A_0A_1 + A_1{}^2A_0)B \;\; A_1{}^3B$$
$$\ldots \; A_0{}^{n-1}B]$$

є матрицею повного рангу, тобто рангу n, де n є розмірністю системи (6).

Слід зазначити, що згідно постулатам класичної теорії керування, якщо система визначена, як керована, то існує нескінченна кількість можливих функцій керування. У публікаціях [3, 5] наведено приклад побудови однієї з таких функцій з використанням явного вигляду розв'язку динамічної системи.

Оскільки задача керування (6) була нами побудована для соціально-еколого-економічної системи, візьмемо для моделі розмірність n=3, тоді зазначена в критерії матриця набуває спрощеного вигляду

$$K = [B \quad A_0 B \quad A_1 B \quad A_0{}^2 B \quad (A_0 A_1 + A_1 A_0) B \quad A_1{}^2 B],$$

а тому дослідити стійкість такої системи буде досить неважко. Наведемо числовий приклад застосування критерію керованості для соціально-еколого-економічної системи.

Приклад. Нехай ми маємо систему (6) із сталим запізненням τ=1 і нехай нам вдалося визначити матриці сталих коефіцієнтів:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді характеристична матриця набуває вигляду:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

яка має ранг 3, тобто є матрицею повного рангу. Тому ми робимо висновок, що за таких умов і за такого вектора коефіцієнтів вектора керування, система є керованою.

Розглянемо ту ж динамічну систему, але з іншим вектором коефіцієнтів біля вектору керування:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Бачимо, що ми втратили безпосередній вплив на одну із складових динамічної системи (про це свідчить 0 в другому рядку). За цих умов характеристична матриця набуває вигляду:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

яка має ранг 3, тобто є матрицею повного рангу. Тому ми робимо висновок, що і за такого вектора коефіцієнтів вектора керування система є також керованою. Таким чином, для керованості системи із такими коефіцієнтами досить мати вплив не на усі три чинники, а лише на два.

Візьмемо інший вектор керування:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що ми втратили безпосередній вплив вже на дві складові динамічної системи. За цих умов характеристична матриця набуває вигляду:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

яка має ранг 2, тобто вже не є матрицею повного рангу. Тому ми робимо висновок, що при такому векторі коефіцієнтів вектора керування, дана динамічна система не є керованою. Таким чином, на цьому прикладі показано, що для керованості системи може бути достатньо мати вплив на два чинники, але при можливості вплинути лише на один, керованість системою втрачається.

Висновки з проведеного дослідження. Проведене дослідження показало можливість застосування математичного апарату дослідження керованості диференціальних систем із запізненням. Для застосування необхідно:

– чітко виділити складові економічної моделі, які демонструють стале запізнення в часі;

– провести додатковий аналіз для розрахунку констант (матриць констант), які відповідають частині динамічної системи, що реагує миттєво, і частині, яка демонструє стале запізнення;

– надати у відповідній формі дані розвитку економічної системи на відрізок часу, що дорівнює часовому запізненню (початкові умови для задачі Коші). Ця умова є обов'язковою у випадку необхідності знаходження стану системи в певний момент часу, для задачі дослідження на керованість, ця умова не є обов'язковою;

– сформулювати попередні оцінки для керуючої функції (інвестиційної складової) у формі матриці констант.

Дослідження показало, що при виконанні вказаних підготовчих етапів, можливо дати оцінку керованості динамічної системи, тобто відповісти на питання, чи можна за наявної системи і заданого вектора керування привести економічну систему до бажаного стану.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Boichuk A., Diblнk J., Khusainov D.Ya., Ruћiиkovб M. Boundary Value Problems for Delay Differential Systems. Advances in Difference Equations, vol. 2010,Article ID 593834, 20 pages, 2010. doi:10.1155/2010/593834

2. Diblнk J., Khusainov D., Ruћiиkovб M. Controllability of linear discrete systems with constant coefficients and pure delay.SIAM Journal on Control and Optimization, 47, No 3 (2008), 1140--1149.DOI: 10.1137/070689085, url =http://link.aip.org/link/?SJC/47/1140/1. (ISSN Electronic:1095-7138, Print: 0363-0129)

3. Baљtinec J., Piddubna G.. Solution of Matrix Linear Delayed System. In XXIX International Colloquium on the Management of Educational Process. Brno, FEM UNOB. 2011. p. 1 – 10. ISBN 978-80-7231-779-0.

4. Baљtinec J., Piddubna G. Controllability of stationary linear systems with delay. 10th International conference APLIMAT. Bratislava, FME STU. 2011, 207 – 216. ISBN 978-80-89313-51-8.

5. Baљtinec J., Piddubna G., Khusainov D. Solution of a certain class of matrix linear delayed system. Dynamical System Modeling and Stability Investigation. Kiev, Ukraine, University of Kyiv, UA. 2011, 149-150.

6. Diblнk J., Khusainov D., Lukбsovб A., Rщћiиkovб M. Control of oscillating systems with a single delay. Advances in Difference Equations, Volume 2010 (2010), Article ID 108218, 15 pages, doi: 10.1155/2010/108218.
7. Экономическая динамика : учеб. пособие / Ю. Г. Лысенко, В. Л. Петренко, В. Н. Тимохин, А. В. Филиппов. – Донецк : Изд-во ДонГУ, 2000. – 176 с.
8. Сергеева Л. Н. Нелинейные модели сложных экономических систем : дис. на соискание уч. степени д-ра экон. наук : 08.03.02 / Л. Н. Сергеева. − Запорожье, 2003. − 400л. : рис. − Библиогр.: л. 361–380.
9. Піддубна О. О. Моделювання динаміки виробничого потенціалу підприємства [Текст] : дис. ... канд. екон. наук : 08.00.11 / Піддубна Ольга Олександрівна ; Дніпропетр. нац. ун-т ім. Олеся Гончара. – Запоріжжя, 2011. – 172, [13] арк. : рис., табл..
10. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – Москва: Наука, 1972. – 352 с.
11. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием. – Москва: Наука, 1965. – 356 с..
12. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1982. – 304 с.

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ СТАЛОГО РОЗВИТКУ ТЕРИТОРІАЛЬНОЇ ГРОМАДИ

DYNAMICAL MODEL OF LOCAL COMMUNITIES SUSTAINABLE DEVELOPMENT

УДК 330.46:519.86

Піддубна О.О.
к.е.н., доцент, перший проректор
Комунальний вищий навчальний заклад «Інститут підприємництва «Стратегія» Дніпропетровської обласної ради»

У статті розглянуто задачу моделювання складових сталого розвитку територіальної громади. Територіальна громада розглядається як складна слабоструктурована динамічна саморегулююча система. Для аналізу та дослідження системи запропоновано використовувати методи економічної динаміки. Математичну модель територіальної громади побудовано, як систему диференціальних рівнянь. Запропоновано задачу управління сталим розвитком територіальної громади представити, як задачу мінімізації часу перехідного режиму.
Ключові слова: *соціально-еколого-економічна система, динамічна модель, сталий розвиток, оптимізація, оптимальне управління.*

В статье рассмотрена задача моделирования составляющих устойчивого развития территориальной общины. Территориальная община рассматривается как сложная слабоструктурированная динамическая саморегулирующаяся система. Для анализа и исследования системы предложено использовать методы экономической динамики. Математическую модель территориальной общины построено как систему дифференциальных уравнений. Предложено задачу управления устойчивым развитием территориальной общины представить как задачу минимизации времени переходного режима.
Ключевые слова: *социально-эколого-экономическая система, динамическая модель, устойчивое развитие, оптимизация, оптимальное управление.*

In the article the problem of modeling the components of sustainable development of local communities was considered. Territorial community was considered as a complex dynamic semistructured self-regulating system. To analyze and study the system was proposed to use methods of economic dynamics. Mathematical model of territorial community was built as a system of differential equations. A problem of local communities sustainable development was proposed to be present as a problem of transitional regime time minimizing.
Key words: *social-ecological-economic system, dynamic model, sustainable development, optimization, optimal control.*

Постановка проблеми. Питання сталого розвитку є одним з ключових напрямів у державному управлінні як на національному, так і на регіональному рівні. Особливої актуальності це питання набуває в умовах децентралізації влади, коли частина повноважень та бюджетів передано органам місцевого самоврядування. Для того, щоб реалізовувати такі повноваження найбільш успішно, необхідні економічно обґрунтовані заходи, впровадження яких надасть можливість оптимально використовувати ресурси територіальних громад.

Ефективним теоретичним інструментарієм побудови механізмів та систем управління економічним розвитком територіальної громади є розробка комплексу моделей сталого розвитку для визначення оптимальних значень параметрів управління.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Моделюванню сталого розвитку та удосконаленню механізмів управління соціально-еколого-економічними системами присвячені роботи таких вчених, як: О. Амоши, В. Василенко, В. Вітлінського, В. Гейця, О. Гранберга, Т. Клебанової, В. Максимова, С. К. Рамазанов, та ін. Науковцями і практиками побудовані різні економіко-математичні моделі, на основі яких можливо розробляти сценарії сталого регіонального розвитку та надавати обґрунтовані пропозиції щодо управління терито-