РОЗДІЛ 9. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ Ф'ЮЧЕРСНИХ КОНТРАКТІВ

ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODEL OF FUTURES CONTRACTS

УДК 368:519.86
DOI: https://doi.org/10.32782/bses.77-30

Цеслів О.В.
к.т.н., доцент кафедри
економічної кібернетики
Національний технічний
університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»
Цеслів О.С.
магістр,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Дейнеко М.Б.
магістр,
Національний технічний
університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»

Tsesliv Olha
National Technical University of Ukraine
"Kyiv Polytechnic Institute
named after Igor Sikorsky"
Tsesliv Oleksandr
Kyiv National University
named after Taras Shevchenko
Deineko Myroslava
National Technical University of Ukraine
"Kyiv Polytechnic Institute
named after Igor Sikorsky

У статті розглянуто тенденції розвитку фондових ринків. Дослідження фондових ринків сьогодні набуває теоретичного та практичного значення. Фінансові ринки це основа ринкових відносин, та важливий індикатор стану економіки. Фінансовий ринок не тільки скеровує потік коштів від власників заощаджень до позичальників, але і визначає рівноважну ціну на товар. В Україні останнім часом, у зв'язку з включенням її до системи світового фінансового ринку, з'явилася гостра необхідність вивчення цінової динаміки на різних сегментах фондового ринку. На даному етапі, розробляються математичні методи для дослідження нерегулярної поведінки на фінансових ринках. В статті розроблена математична модель динаміки ф'ючерсних контрактів на фінансовому ринку. Показана можливість прогнозувати ціни на основі нелінійної моделі тренду. Побудована нелінійна математична модель динаміки ф'ючерсних контрактів, заснована на системі нелінійних диференційних рівняннях. Розрахунки проведенні на прикладі ф'ючерсів на каву США.
Ключові слова: *ціна, індекси цін, ф'ючерси, фінансовий ринок, нелінійна математична модель.*

In the article, the tendencies of the development of stock markets are considered. The study of stock markets today is gaining theoretical and practical importance. Financial markets are the basis of market relations and an important indicator of the state of the economy. The financial market not only directs the flow of funds from owners of savings to borrowers, but also determines the equilibrium price for goods In Ukraine recently, in connection with its inclusion in the world financial market system, there is an urgent need to study price dynamics in different segments of the stock market. At this stage, mathematical methods are being developed for irregular behavior in financial markets study. In this work, methods of nonlinear algebraic equations are used for forecasting the price of futures contracts. In these methods, nonlinear algebraic equations, also called equations with polynomials, are defined as equations with polynomials. Considered the method of price forecasting of futures contracts based on a nonlinear trend model quadratic parabola. Traditional methods of modelling the dynamics of stock market indicators, such as: stochastic and approach based on the theory of deterministic chaos, require additional research. Methods of stochastic analysis occupy an important place in modelling the pricing of various financial instruments. Despite the simplicity of the model, it has a significant drawback – the price of the asset can acquire negative values, which do not correspond to the economic content. The problem of correct description of stochastic variables corresponding to certain financial indicators is inherent in several other models. One of the ways to solve this problem is devoted to this article. The article develops a mathematical model of the dynamics of futures contracts in the financial market, which is based on a system of nonlinear differential equations. The algorithm of the developed scheme of adaptation model adaptation scheme. The mathematical model based on the theory of deterministic chaos. Calculations are carried out on the example of US coffee futures. The results of the calculations are provided.
Key words: *price, price index, futures, financial market, non-linear mathematical model.*

Постановка проблеми. Традиційними методами моделювання динаміки показників фондових ринків є стохастичний та підхід та заснований на теорії детермінованого хаосу. Детермінований хаос пропонує пояснення нерегулярної поведінки у системах, які не є стохастичними, як результат складних нелінійних взаємодій внутрішніх параметрів даних систем.

Існують методи нелінійні алгебраїчні рівняння. В цих методах нелінійні алгебраїчні рівняння, які також називають рівняннями із многочленами, визначаються як рівняння із поліномами. Розглянемо метод прогнозування ціни ф'ючерсних контрактів на основі нелінійної моделі тренду квадратичної параболи.

Побудуємо математичну модель динаміки ф'ючерсних контрактів на фінансовому ринку, засновану на нелінійних диференційних рівняннях.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Застосування методів нелінійної динаміки до фінансового дослідження ринку було розпочато Б. Мандельбротом [1, с. 582], П. Самуельсоном [2, с. 467], який запропонував для опису ціни акцій використовувати модель геометричного (економічного) броунівського руху.

Методи стохастичного аналізу займають важливе місце в моделюванні ціноутворення різноманітних фінансових інструментів. Стохастична модель для опису фінансових активів і оцінки вартості опціонів, що ґрунтувалась на броунівському русі, вперше була побудована Башельє, Попри простоту моделі їй присутній суттєвий недолік – ціна активу може набувати від'ємних значень, що не відповідає економічному змісту. На основі моделі геометричного броунівського руху Блек [2, с. 247] і Шоулз [3, с. 152] вивели знамениту формулу для оцінювання опціонів. Проблема коректного опису стохастичних змінних, що відповідають певним фінансовим показникам, притаманна ряду інших моделей. Одному із шляхів вирішення цієї проблеми присвячена дана стаття.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є створення адекватної математичної моделі динаміки ф'ючерсних контрактів на фінансовому ринку. Спрогнозувати ціни на основі нелінійної моделі тренду. Побудувати нелінійну математичну модель динаміки ф'ючерсних контрактів, за допомогою системи нелінійних диференційних рівнянь.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо метод прогнозування ціни ф'ючерсних контрактів на основі нелінійної моделі тренду квадратичної параболи.

За останній місяць отримали наступні ціни ф'ючерсних контрактів на каву : 221,33; 218,94; 215,69; 209,33; 221,68; 220,2; 225,09; 219,34; 223,63; 219,26; 218,07. Вважаємо, що тенденція розвитку споживання в найближчому майбутньому не зміниться, передбачити рівень споживання продукту X в році $T = n + 1 = 12$.

Проаналізувавши проміжки розглянутого часового ряду, можемо стверджувати, що тенденцію розвитку розглянутого явища, потрібно оцінити квадратичною параболою. Використаємо матричне рівняння та занумеруємо одиниці часу, щоб їхня сума задовольняла умову Σt = 0, маємо:

Многочлен другого ступеня (квадратна парабола) описується формулою:

$$y_t = 219{,}49 + 0{,}293t - 0{,}016t^2. \qquad (1)$$

Використовуючи МНК для оцінок параметрів, потрібно розв'язати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} y_t = na_0 + a_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t + a_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 \\ \sum\limits_{t=1}^{n} ty_t = a_0 \sum\limits_{t=1}^{n} t + a_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 + a_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^3 \\ \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 y_t = a_0 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 + a_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t^3 + a_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^4 \end{cases}$$

Підставимо:

$$\sum_{t=1}^{n} t = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{t=1}^{n} t^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{t=1}^{n} t^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\frac{3n^2+3n+1}{5}$$

Параметри параболи можна оцінити наступним рівнянням:

$$a = \left(T^t T\right)^{-1} Ty.$$

$$y_t = 219{,}49 + 0{,}293t - 0{,}016t^2. \qquad (1)$$

Створимо адекватну математичну модель динаміки ф'ючерсних контрактів на фінансовому ринку, засновану на нелінійних диференційних рівняннях.

Рис. 1. Огляд – Ф'ючерс на каву США

Джерело: побудовано за інформацією [10]

$$y=\begin{array}{r} 221{,}33\\ 218{,}94\\ 215{,}69\\ 209{,}33\\ 221{,}68\\ 220{,}2\\ 225{,}09\\ 219{,}34\\ 223{,}63\\ 219{,}26\\ 218{,}07 \end{array}$$

T=

1	-5	25
1	-4	16
1	-3	9
1	-2	4
1	-1	1
1	0	0
1	1	1
1	2	4
1	3	9
1	4	16
1	5	25

$$T^tT=\begin{array}{ccc} 11 & 0 & 110\\ 0 & 110 & 0\\ 110 & 0 & 1958 \end{array}$$

Det(T^tT)=1038180

$$\left(T^tT\right)^{-1}=\begin{array}{ccc} 0{,}207 & 0 & -0{,}0116\\ 0 & 0{,}009 & 0\\ -0{,}0116 & 0 & 0{,}00116 \end{array}$$

$$T^t y=\begin{array}{c} 2415{,}56\\ 32{,}23\\ 2411{,}53 \end{array}$$

Параметри моделі мають певний економічний зміст (рис. 1). Для моделювання динаміки показників фондових ринків складемо систему рівнянь (2).

$$\begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} &= a_1(t)X_1(t)+a_2(t)X_1(t)X_2(t)+\\ &\quad +a_3(t)X_1(t)X_3(t)\\ \frac{dX_2(t)}{dt} &= b_1(t)X_2(t)X_1(t)+b_2(t)X_2+\\ &\quad +b_3(t)X_2(t)X_3(t)\\ \frac{dX_3(t)}{dt} &= c_1(t)X_3(t)X_1(t)+\\ &\quad +c_2(t)X_3(t)X_2(t)+c_3(t)X_3(t), \end{aligned} \qquad (2)$$

де $X_1(t)$ – ціна контракту, $X_2(t)$– об'єм торгів і $X_3(t)$– «відкритий інтерес»; $X_1(t)\ X_2(t)$ – оборот торгів; $X_1(t)X_3(t)$ – поточна ліквідність ринку, показує взаємозв'язок між ціною договору та «відкритим інтересом»; $X_2(t)X_3(t)$ – взаємозв'язок між обсягом торгів та «відкритим інтересом».

Невідомі параметри $a_1(t)$, $a_2(t), a_3(t), b_1(t)$, $b_2(t), b_3(t)$, $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$, визначають ступінь впливу відповідних показників ринку та їх взаємозв'язок. Дані параметри є змінними на деякому досить великому відрізку часу, але кусково-постійні на невеликому інтервалі. Вони характеризують:

$a_1(t)$ – [1/сек] частота зміни ціни;

$a_2(t)$ – [1/сек] частота зміни обороту торгів;

$a_3(t)$ – [1/сек] частота зміни ліквідності ринку;

$b_1(t)$ − [1/руб·сек] вплив ціни зміну обороту торгів;

$b_2(t)$ − [1/сек] частота зміни обсягу торгів;

$b_3(t)$ − [1/шт·сек] вплив відкритого інтересу зміну взаємозв'язку: обсяг – «відкритий інтерес»;

$c_1(t)$ 1(t) − [1/руб·сек] вплив ціни зміну ліквідності ринку;

$c_2(t)$− [1/шт·сек] вплив обсягу торгів зміну взаємозв'язку: обсяг – «відкритий інтерес»;

$c_3(t)$− [1/сек] частота зміни відкритого інтересу.

На першому етапі побудови точкового прогнозу визначаються невідомі параметри системи. Для цього модель (1) розглядаємо у фіксовані моменти часу *t-2*, *t-1*, *t*. У матричній формі цей запис має такий вигляд (3):

$$\vec{D}_t = Q_t\overrightarrow{K_t} \qquad (3)$$

$$\vec{D}_t=\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t-2)}{dt}+\frac{dx_1(t-1)}{dt}+\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{dx_2(t-2)}{dt}+\\ \frac{dx_2(t-1)}{dt}+\frac{dx_2(t)}{dt}+\frac{dx_3(t-2)}{dt}+\frac{dx_3(t-1)}{dt}+\frac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix}; \qquad (4)$$

$$\overrightarrow{K_t} = [a_1\ a_2\ a_3\ b_1\ b_2\ b_3\ c_1\ c_2\ c_3\ ] \qquad (5)$$

$$Q_t=\begin{bmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{array}{ccc} X_1(t-2) & X_1(t-2)X_2(t-2) & X_1(t-2)X_3(t-2)\\ X_1(t-1) & X_1(t-1)X_2(t-1) & X_1(t-1)X_3(t-1)\\ X_1(t) & X_1(t)X_2(t) & X_1(t)X_3(t) \end{array}$$

$$B=\begin{array}{ccc} X_1(t-2)X_2(t-2) & X_2(t-2) & X_2(t-2)X_3(t-2)\\ X_1(t-1)X_2(t-1) & X_2(t-1) & X_1(t-1)X_3(t-1)\\ X_1(t)X_2(t) & X_2(t) & X_1(t)X_3(t) \end{array}$$

$$C=\begin{array}{ccc} X_1(t-2)X_3(t-2) & X_2(t-2)X_3(t-2) & X_3(t-2)\\ X_1(t-1)X_3(t-1) & X_2(t-1)X_3(t-1) & X_3(t-1)\\ X_1(t)X_3(t) & X_2(t)X_3(t) & X_3(t) \end{array}$$

Вектор перших похідних можна знайти різними способами. Якщо тимчасові ряди мають довжину поблизу мінімальної (три значення рівня ряду), похідні обчислюються методом кінцевих різниць. Якщо ж довжина часового ряду становить більше десяти значень, найдоцільніше використовувати сплайни.

Вектор невідомих параметрів системи знаходиться за формулою:

$$\overrightarrow{K_t} = Q_t^{-1}\overrightarrow{D_t}\ \ X_3(t+1).$$

Знайдені параметри системи $a_1(t)$, $a_2(t), a_3(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t), b_3(t)$, $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ підставляємо

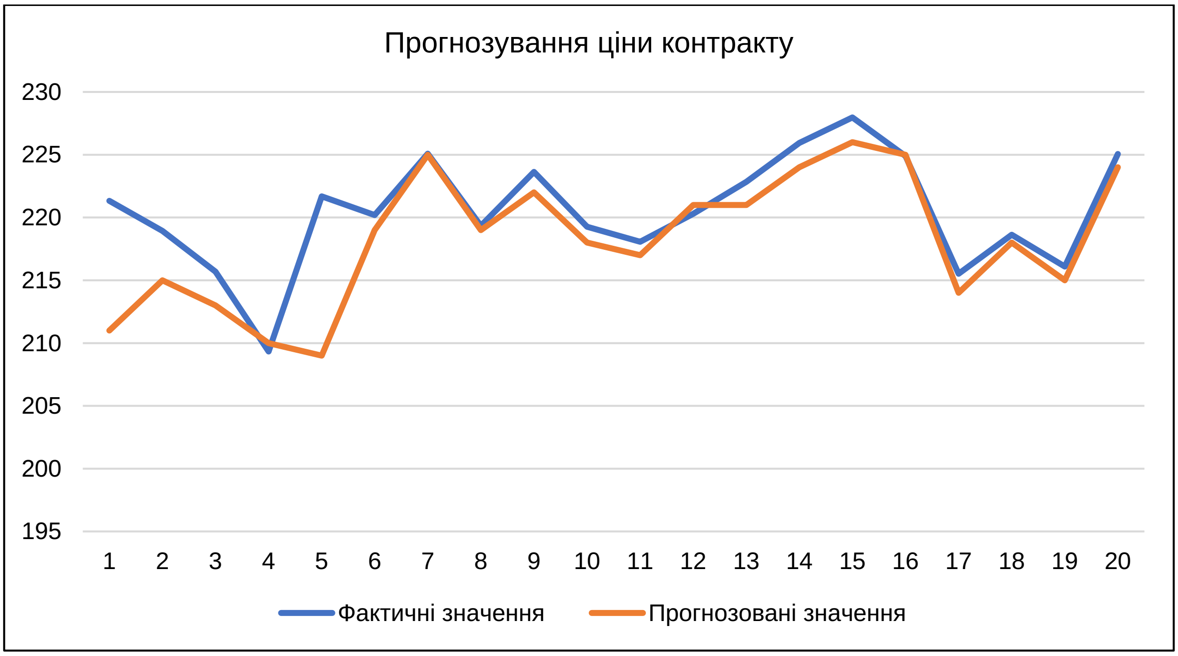

Рис. 2. Порівняння ціни реальних ф'ючерсів на каву в США та прогнозованих, отриманих описаним методом

Джерело: побудовано авторами засобами програмного інструментарію Microsoft Excel

модель (1) і вважаємо їх постійними на кроці прогнозування. Далі вирішуючи завдання Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами у точці t, $X_1(t+1)$ – прогностичне значення ціни контракту, $X_2(t+1)$ – прогностичне значення обсягу торгів, – прогностичне значення «відкритого інтересу». В результаті отримуємо точковий прогноз на один крок уперед. Під кроком прогнозування розуміється торгова сесія, яка може становити один день, один тиждень, один місяць і т.д.

Алгоритм розробленої схеми адаптації моделі:

1. Описаним вище способом знаходимо $\overrightarrow{K_t}$ моделі – вектор параметрів.

2. По моделі (2) будуємо прогноз однією крок вперед, задаючи початкові умови у точці *t*.

3. Здійснюємо перерахунок параметрів моделі $\overrightarrow{K_{t+1}}$ з урахуванням останніх отриманих реальних значень часових рядів. І тому розглядаємо модель (1) у наступні фіксовані моменти часу *t – 1*, *t*, *t + 1* тобто. здійснюємо перенесення відліку часу на один інтервал вперед, формули(4-5).

4. Підставляємо знайдені параметри $a_1(t)$, $a_2(t), a_3(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ в систему (2). Вирішуючи завдання Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь за початкових умов у точці $t+1$, знаходимо вектор прогностичних значень у точці $t+2$.

В результаті розрахунків отримали наступні результати.

Висновки. В даній роботі була створена математична модель динаміки ф'ючерсних контрактів на фінансовому ринку. Розглянуто метод прогнозування ціни ф'ючерсних контрактів на основі нелінійної моделі тренду квадратичної параболи.

Побудовано нелінійну математичну модель динаміки ф'ючерсних контрактів, з використанням системи нелінійних диференційних рівнянь. Представлена математична модель, заснована на теорії детермінованого хаосу. Прогноз отриманий, за допомогою цієї моделі практично співпадає з реальними значеннями.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Mandelbrot B. Random Walks, Fire Damage Amount and Other Paretian Risk Phenomena. *Operations Research, INFORMS,* vol. 12(4), 1964, pages 582–585. DOI: https://doi.org/10.1287/opre.12.4.582.
2. Samuelson P.A. An exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. *Journal of Political Economy*. 1958. Vol. 66, № 6. P. 467–482. DOI: https://doi.org/10.1086/258100.
3. Naukowe Z. Deterministic chaos in economic processes modeling Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach. *Studia Ekonomiczne*. 2015. № 234. P. 152–162. URL: https://www.ue.katowice.pl/fileadmin/user_upload/wydawnictwo/SE_Artyku%C5%82y_231_250/SE_234/12.pdf.
4. Sorin V., Pascu P., Morariu N. Chaos Models in Economics. *Journal of Computing.* 2010. № 1. P. 79–83. URL: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1001/1001.3492.pdf.
5. Геєць В. М. Клебанова Т. С., Черняк О. І., Іванов В. В., Дубровіна Н. А., Ставицький А. В. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування : підручник. Харків : ВД «ІНЖЕК», 2005. 396 с.

6. Лук'яненко І. Г., Городніченко Ю. О. Сучасні економетричні методи у фінансах : навчальний посібник. Київ : Літера ЛТД, 2002. 352 с.

7. Стрижиченко К .А. Модели взаимодействия финансовых рынков. *Бізнес Інформ*. 2006. № 11. С. 95–105.

8. Школьник І. О. Фінансовий ринок України: сучасний стан і стратегія розвитку : монографія. Суми : ВВП «Мрія» ТОВ; УАБС НБУ, 2008. 348 с.

9. Сайт індексу ПФТС. URL: http://www.PFTS.com.ua.

10. Investing.com. URL: https://ru.investing.com/commodities/us-coffee-c.

REFERENCES:

1. Mandelbrot B. (1964). Random Walks, Fire Damage Amount and Other Paretian Risk Phenomena. *Operations Research, INFOR*MS, vol. 12(4), pp. 582–585. DOI: https://doi.org/10.1287/opre.12.4.582

2. Samuelson P. A. (1958) An exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. *Journal of Political Economy*, vol. 66, № 6, pp. 467–482. DOI: https://doi.org/10.1086/258100.

3. Naukowe Z. (2015) Deterministic chaos in economic processes modeling Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach. *Studia Ekonomiczne*, vol. 234, pp. 152–162. Available at: https://www.ue.katowice.pl/fileadmin/user_upload/wydawnictwo/SE_Artyku%C5%82y_231_250/SE_234/12.pdf.

4. Sorin V., Pascu P., Morariu N. (2010) Chaos Models in Economics. *Journal of computing*, vol. 1, pp. 79–83. Available at: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1001/1001.3492.pdf.

5. Geets V., Klebanova T., Chernyak O., Ivanov V., Dubrovina N., Stavytskyi A. (2005) Models and methods of socio-economic forecasting [Models and methods of socio-economic forecasting]. Kharkiv: Publisher INZHEK.

6. Lukyanenko I. G., Horodnichenko Yu. O. (2002) Modern econometric methods in finance [Modern econometric methods in finance]. Kyiv: Litera LTD.

7. Stryzhichenko K. (2006) Models of financial market interaction. *Business Inform*, vol. 11, pp. 95–105.

8. Shkolnyk I. O. (2008) Finansovyy rynok Ukrayiny: suchasnyy stan i stratehiya rozvytku [Financial market of Ukraine: current state and development strategy]. Sumy: VVP «Mriya» TOV.

9. Site of the PFTS index. Available at: http://www.PFTS.com.ua

10. Investing.com. Available at: https://ru.investing.com/commodities/us-coffee-c.